Metodología de Encuestas
Vol 6, Núm 1, 2004, 9-22

ISSN: 1575-7803

ESTIMACIÓN DE LA VARIANZA POBLACIONAL EN EL MUESTREO EN OCASIONES SUCESIVAS

Amelia V. García Luengo
Eva M. Artés Rodríguez
Inmaculada Oña Casado
Universidad de Almería

RESUMEN

En este trabajo, bajo un diseño de muestreo en dos ocasiones, estimamos la varianza poblacional mediante un estimador lineal insesgado. Determinando los valores que minimizan la varianza de este estimadorf, obtenemos el estimador de la varianza, junto con la expresión de su varianza y la fracción óptima que debe aparearse. Se obtiene la curva que da la ganancia en precisión del estimador propuesto sobre el estimador simple que no utiliza la información sobre la primera ocasión. Sin embargo, utilizando la proporción óptima de apareamiento, obtenida al estimar la media poblacional, en la expresión de la varianza del estimador propuesto, la pérdida en precisión para dicho estimador de la varianza poblacional es despreciable. Esto sugiere que el problema de la estimación de la varianza poblacional puede ser simultáneamente considerado con la estimación de la media poblacional.

Palabras clave: *muestreo sucesivo, varianza poblacional, fracción de apareamiento, ganancia en precisión.*

Introducción

En las encuestas muestrales es frecuente la necesidad de estimar algún parámetro poblacional a intervalos regulares de tiempo. Si existe una relación entre el valor de un elemento de la población en un período de tiempo, y el valor del mismo elemento en el período siguiente, entonces es posible emplear la información contenida en la muestra del período precedente para mejorar la estimación actual del parámetro poblacional. En este sentido, para que sea posible utilizar la información muestral precedente, se debe obtener la muestra de manera que los elementos muestrales en los dos períodos sucesivos tengan algunos elementos comunes, es decir, puede ser más conveniente el reemplazamiento parcial de la muestra. En este caso, se observa la misma variable en dos ocasiones y sólo una parte de las unidades observadas es común a dichas ocasiones. Las observaciones de la primera ocasión se utilizan como información complementaria para mejorar la estimación en la segunda ocasión.

En estas condiciones, ha sido estudiada la estimación de parámetros poblacionales, tales como la media o la razón (Jessen, 1942; Patterson, 1950; García Luengo, 2001; García Luengo y Artés, 2002).

De una forma similar, es razonable suponer que esta técnica de estimación se puede utilizar, bajo las condiciones adecuadas, para proporcionar estimadores eficientes de la varianza.

En este trabajo, bajo un diseño de muestreo en dos ocasiones, estimamos la varianza poblacional mediante un estimador lineal insesgado. Determinando los valores que minimizan la varianza de este estimador, obtenemos el estimador de la varianza, junto con la expresión de su varianza y la fracción óptima que debe aparearse. Se obtiene la curva que da la ganancia en precisión del estimador propuesto sobre el estimador simple que no utiliza la información sobre la primera ocasión. Sin embargo, utilizando la proporción óptima de apareamiento, obtenida al estimar la media poblacional, en la expresión de la varianza del estimador propuesto, la pérdida en precisión para dicho estimador de la varianza poblacional es despreciable. Esto sugiere que el problema de la estimación de la varianza poblacional puede ser simultáneamente considerado con la estimación de la media poblacional.

Estimación de la varianza poblacional en la segunda ocasión. Estimador lineal

Consideremos una población finita $U = \{U_1, \ldots , U_N\}$ de unidades. Supongamos que se extrae una muestra aleatoria simple (suponiendo grande el tamaño de la población para poder prescindir del factor de corrección por finitud) o una muestra aleatoria con reemplazo.

Sea N el tamaño de la población, de la que se extrae en la primera ocasión una muestra aleatoria simple de tamaño n. Sea una muestra aleatoria simple de tamaño $m = pn$ (muestra apareada) submuestreada de las n unidades, que se retiene para la segunda ocasión. Además, sea una muestra aleatoria simple de tamaño $u = qn$ tomada en la segunda ocasión del universo $N - m$ que queda después de omitir las m unidades.

Sean $\overline{X}, \overline{Y}$ las medias poblacionales en la primera y segunda ocasión,

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i; \qquad \overline{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$$

Sean $\overline{x}, \overline{y}$ las medias muestrales en la primera y segunda ocasión,

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i; \qquad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Sean σ_x^2, σ_y^2 las varianzas poblacionales en la primera y segunda ocasión,

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{X}\right)^2; \qquad \sigma_y^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - \overline{Y}\right)^2$$

Sean S_x^2, S_y^2 las varianzas muestrales en la primera y segunda ocasión,

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2; \qquad S_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2$$

El parámetro de interés es σ_y^2 . Proponemos el siguiente estimador lineal de $\sigma_y^2, \widehat{S}_y^2$:

$$\widehat{S}_y^2 = as_{xu}^2 + bs_{xm}^2 + cs_{ym}^2 + ds_{yu}^2$$

donde

$s_{xm}^2\left(s_{ym}^2\right)$, las varianzas muestrales en la primera (segunda) ocasión correspondientes a las unidades que son comunes en las dos ocasiones (apareadas).

$s_{xu}^2\left(s_{yu}^2\right)$, las varianzas muestrales en la primera (segunda) ocasión correspondientes a las unidades no apareadas.

Teniendo en cuenta que las varianzas muestrales son estimadores insesgados de la varianza poblacional para cada ocasión,

$$E\left(s_{xu}^2\right) = E\left(s_{xm}^2\right) = \sigma_x^2$$

$$E\left(s_{yu}^2\right) = E\left(s_{ym}^2\right) = \sigma_y^2$$

se tiene que

$$E\left(\widehat{S}_y^2\right) = (a+b)\sigma_x^2 + (c+d)\sigma_y^2$$

Para que $\widehat{S}_y^2$ sea un estimador insesgado de σ_y^2 deben ser

$$a+b=0 \qquad y \qquad c+d=1$$

luego

$$a=-b \qquad y \qquad d=1-c$$

Por lo tanto

$$\widehat{S}_y^2 = a\left(s_{xu}^2 - s_{xm}^2\right) + cs_{ym}^2 + (1-c)s_{yu}^2$$

La varianza de $\widehat{S}_y^2$ es

$$V\left(\widehat{S}_y^2\right) = a^2\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)\frac{S_x^4}{n}\left[\beta_2(x)-1\right] + \frac{c^2}{p}\frac{S_y^4}{n}\left[\beta_2(y)-1\right] +$$

$$+\frac{(1-c)^2}{q}\frac{S_y^4}{n}\left[\beta_2(y)-1\right] - \frac{2ac}{p}\frac{S_y^2 S_x^2}{n}(\theta-1) \qquad (1)$$

Donde en un primer grado de aproximación (véase Kendall y Stuart, 1977):

$$V\left(s_y^2\right) \approx \frac{1}{n}S_y^4\left[\beta_2(y)-1\right]; \qquad V\left(s_x^2\right) \approx \frac{1}{n}S_x^4\left[\beta_2(x)-1\right]$$

$$Cov\left(s_y^2, s_x^2\right) \approx \frac{1}{n}S_y^2 S_x^2(\theta-1)$$

siendo

$$S_x^2 = \frac{N}{N-1}\sigma_x^2 \quad \text{con} \quad \sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{X}\right)^2$$

$$S_y^2 = \frac{N}{N-1}\sigma_y^2 \quad \text{con} \quad \sigma_y^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - \overline{Y}\right)^2$$

$$\beta_2(y) = \frac{\mu_{40}}{\mu_{20}^2}; \qquad \beta_2(x) = \frac{\mu_{04}}{\mu_{02}^2}; \qquad \theta = \frac{\mu_{22}}{\mu_{20}\mu_{02}}$$

$$\mu_{rs} = \frac{1}{N}\sum\left(y_j - \overline{Y}\right)^r\left(x_j - \overline{X}\right)^s$$

Los valores óptimos de a y c, que minimizan la varianza, son:

$$a_{opt} = \frac{[\beta_2(y)-1]pq(\theta-1)}{K-q^2(\theta-1)^2}\frac{S_y^2}{S_x^2}$$

$$c_{opt} = \frac{pK}{K-q^2(\theta-1)^2}$$

donde $K = [\beta_2(x)-1][\beta_2(y)-1]$

Entonces, la expresión para el estimador de la varianza en la segunda ocasión viene dada por:

$$\widehat{S}_y^2 = \frac{[\beta_2(y)-1]pq(\theta-1)}{K-q^2(\theta-1)^2}\frac{S_y^2}{S_x^2}\left(s_{xu}^2 - s_{xm}^2\right) + \frac{pK}{K-q^2(\theta-1)^2}s_{ym}^2 + $$
$$+\frac{q\left[K-q(\theta-1)^2\right]}{K-q^2(\theta-1)^2}s_{yu}^2 \qquad (2)$$

Si los valores de a_{opt} y c_{opt} se sustituyen en (1), obtenemos la siguiente expresión para la varianza del estimador

$$V\left(\widehat{S}_y^2\right) = \frac{S_y^4}{n}[\beta_2(y)-1]\frac{K-q(\theta-1)^2}{K-q^2(\theta-1)^2} = \frac{S_y^4}{n}[\beta_2(y)-1]\frac{1-q\dfrac{(\theta-1)^2}{K}}{1-q^2\dfrac{(\theta-1)^2}{K}} \qquad (3)$$

Si igualamos a cero la derivada de $V\left(\widehat{S}_y^2\right)$ respecto de q, encontraremos, para una determinada muestra de tamaño n, el valor de q que hace mínima la varianza. Por tanto, tenemos que la fracción óptima de reemplazamiento es

$$q_{opt} = \frac{K-\sqrt{K^2-K(\theta-1)^2}}{(\theta-1)^2}$$

y, por tanto, la fracción óptima de la muestra total que debe aparearse en la parte común es

$$p_{opt} = \frac{\sqrt{K^2-K(\theta-1)^2}}{K+\sqrt{K^2-K(\theta-1)^2}}$$

Cuando el óptimo de q se sustituye en (3) se obtiene el valor mínimo de la varianza del estimador

$$V_{mín}\left(\widehat{S}_y^2\right) = \frac{S_y^4}{n}[\beta_2(y)-1]\frac{K+\sqrt{K^2-K(\theta-1)^2}}{2K} \qquad (4)$$

Por otra parte, si sólo se considera la información proporcionada por la segunda ocasión, la varianza del estimador sería

$$V\left(s_y^2\right)=\frac{S_y^4}{n}\left[\beta_2(y)-1\right]$$

Comprobamos que el estimador $V_{mín}\left(\widehat{S}_y^2\right)$ es más preciso que el estimador $V\left(s_y^2\right)$, comparando sus respectivas varianzas

$$V_{mín}\left(\widehat{S}_y^2\right)-V\left(s_y^2\right)\approx\frac{S_y^4}{n}\frac{-1+\sqrt{1-\frac{(\theta-1)^2}{K}}}{\beta_2(y)-1}\leq 0$$

Casos particulares del estimador de la varianza poblacional en la segunda ocasión

1. Si p = 0 no existe parte común y será q = -1. El estimador de la varianza dado (2) se convertirá en

$$\widehat{S}_y^2=\frac{K-(\theta-1)^2}{K-(\theta-1)^2}s_{yu}^2=s_{yu}^2$$

y la varianza del estimador será

$$V\left(\widehat{S}_y^2\right)=\frac{S_y^4}{n}\left[\beta_2(y)-1\right]\frac{K-(\theta-1)^2}{K-(\theta-1)^2}=\frac{S_y^4}{n}\left[\beta_2(y)-1\right]$$

que coincide con la varianza de la varianza muestral.

2. Si p = 1 y q = 0 el apareamiento de la muestra es completo. El estimador de la varianza dado (2) quedará de la forma

$$\widehat{S}_y^2=\frac{K}{K-0}s_{yu}^2$$

y la varianza del estimador será

$$V\left(\widehat{S}_y^2\right)=\frac{S_y^4}{n}\left[\beta_2(y)-1\right]$$

que coincide con la varianza de la varianza muestral.

3. Si $S_y^2=S_x^2$ la expresión del estimador (2) resulta algo simplificada

$$\widehat{S}_y^2=\frac{\left[\beta_2(y)-1\right]pq(\theta-1)}{K-q^2(\theta-1)^2}\left(s_{xu}^2-s_{xm}^2\right)+\frac{pK}{K-q^2(\theta-1)^2}s_{ym}^2+\frac{q\left[K-q(\theta-1)^2\right]}{K-q^2(\theta-1)^2}s_{yu}^2$$

pero su varianza no experimenta alteración, pues seguirá siendo

$$V\left(\widehat{S}_y^2\right)=\frac{S_y^4}{n}\left[\beta_2(y)-1\right]\frac{K-q(\theta-1)^2}{K-q^2(\theta-1)^2}$$

4. Un estimador de la varianza poblacional de la primera ocasión se obtiene de la fórmula (2) cambiando los valores de las ocasiones 1 por la 2 y la 2 por la 1, obteniendo

$$\widehat{S}_x^2=\frac{\left[\beta_2(y)-1\right]pq(\theta-1)}{K-q^2(\theta-1)^2}\frac{S_x^2}{S_y^2}\left(s_{yu}^2-s_{ym}^2\right)+\frac{pK}{K-q^2(\theta-1)^2}s_{xm}^2+\frac{q\left[K-q(\theta-1)^2\right]}{K-q^2(\theta-1)^2}s_{xu}^2$$

Este estimador podría utilizarse si se puede esperar el tiempo necesario hasta que se disponga de los datos de ambas ocasiones. La varianza del estimador se obtendría cambiando S_y^4 por S_x^4

$$V\left(\widehat{S}_x^2\right)=\frac{S_x^4}{n}\left[\beta_2(x)-1\right]\frac{K-q(\theta-1)^2}{K-q^2(\theta-1)^2}$$

Ganancia en precisión

A continuación obtenemos la ganancia en precisión del estimador, $\widehat{S}_y^2$, que utiliza información sobre la ocasión actual, sobre el estimador de la varianza, que sólo utiliza información sobre la ocasión actual.

$$G=\frac{V\left(\widehat{s}_y^2\right)-V\left(\widehat{S}_y^2\right)}{V\left(\widehat{S}_y^2\right)}=\frac{p(1-p)(\theta-1)^2}{K-(1-p)(\theta-1)^2}$$

K será positiva si

$$\left[\beta_2(y),\beta_2(x)\right]>(1,1)$$

Por definición $p \leq 1$. Si $p = 1$ (apareamiento total) ó $p = 0$ (reemplazamos toda la muestra), la ganancia vale cero. Para cualquier otro valor de p obtendremos una ganancia positiva siempre que se verifique

$$\frac{(\theta-1)^2}{K}\geq 0$$

donde

$$\theta=\frac{\mu_{22}}{\mu_{20}\mu_{02}}=\frac{\mu_{22}}{\sqrt{\frac{\mu_{40}}{\beta_2(y)}}\sqrt{\frac{\mu_{04}}{\beta_2(x)}}}=\sqrt{\beta_2(y),\beta_2(x)}\frac{\mu_{22}}{\sqrt{\mu_{40}}\sqrt{\mu_{04}}}$$

$$\theta = \rho_{x^2 y^2} \sqrt{\beta_2(y), \beta_2(x)}$$

siendo $\rho_{x^2 y^2}$ el coeficiente de correlación entre y^2 y x^2.

$$\rho_{x^2 y^2} = \frac{\frac{1}{N}\sum\left(y_j - \bar{Y}\right)^2\left(x_j - \bar{X}\right)^2}{\sqrt{\frac{1}{N}\sum\left(y_j - \bar{Y}\right)^4}\sqrt{\frac{1}{N}\sum\left(x_j - \vec{X}\right)^4}}$$

θ - 1 será positiva si

$$\rho_{x^2 y^2} > \frac{1}{\sqrt{\beta_2(y), \beta_2(x)}}$$

Si consideramos el valor mínimo de la varianza del estimador, la ganancia en este caso es

$$G_{opt} = \frac{V\left(\hat{s}_y^2\right) - V_{\min}\left(\hat{S}_y^2\right)}{V_{\min}\left(\hat{S}_y^2\right)} = \frac{K - \sqrt{K^2 - K(\theta - 1)^2}}{K + \sqrt{K^2 - K(\theta - 1)^2}} \tag{5}$$

Las figuras 1 y 2 y el cuadro 1 indican el porcentaje de ganancia en precisión para distintos valores de ρ y $\beta_2(x)$, $\beta_2(y)$ obtenidos al sustituir en la expresión:

$$\left[\frac{K - \sqrt{K^2 - K(\theta - 1)^2}}{K + \sqrt{K^2 - K(\theta - 1)^2}}\right] \times 100$$

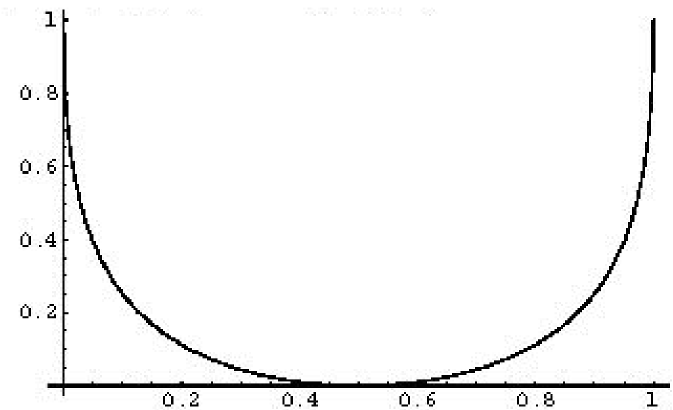

Figura 1a: *fracción óptima de apareamiento*
en función de ρ y $\beta_2(x)$=2, $\beta_2(y)$=2.

Cuadro 1: *porcentaje de ganancia en precisión,* G_{opt}, *en función de* ρ y $\beta_2(x)$, $\beta_2(y)$.

ρ	$\beta_2(x)$, $\beta_2(y)$					
	2,2	2,3	2,4	3,3	3,4	4,4
0,1	0,6250 *25,0000*	0,5418 *8,3690*	0,5235 *4,6981*	0,5163 *3,2658*	0,5092 *1,8462*	0,5051 *1,0205*
0,2	0,5556 *11,1111*	0,5174 *3,4831*	0,5081 *1,6234*	0,5051 *1,0205*	0,5020 *0,3963*	0,5006 *0,1114*
0,3	0,5218 *4,3561*	0,5045 *0,8946*	0,5010 *0,1919*	0,5003 *0,0626*	0,5000 *0,0064*	0,5006 *0,1114*
0,4	0,5051 *1,0205*	0,5000 *0,0051*	0,5007 *0,1442*	0,5013 *0,5513*	0,5031 *0,6275*	0,5051 *1,0205*
0,5	0,5000 *0,0000*	0,5032 *0,6395*	0,5074 *1,4722*	0,5081 *1,6133*	0,5117 *2,3386*	0,5147 *2,9437*
0,6	0,5051 *1,0205*	0,5146 *2,9211*	0,5221 *4,4144*	0,5218 4,3561	0,5269 *5,3818*	0,5307 *6,1327*
0,7	0,5218 *4,3561*	0,5368 *7,3579*	0,5481 *9,6142*	0,5449 *8,9820*	0,5514 *10,2899*	0,5556 *11,1111*
0,8	0,5556 *11,1111*	0,5765 *15,3024*	0,5937 *18,7320*	0,5834 *16,6764*	0,5915 *18,2928*	0,5953 *19,0569*
0,9	0,6250 *25,0000*	0,6562 *31,2365*	0,6890 *37,8021*	0,6550 *30,9944*	0,6655 *33,1064*	0,6672 *33,4323*
En casillas: valor de q y, en cursiva, *ganancia*.						

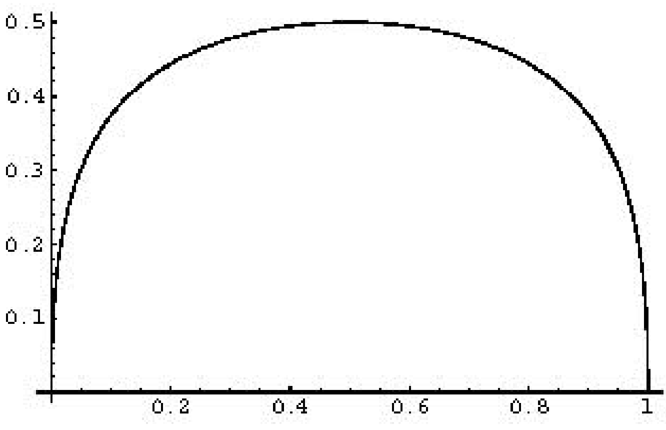

Figura 1b: *ganancia en precisión en función de* ρ y $\beta_2(x)$=2, $\beta_2(y)$=2.

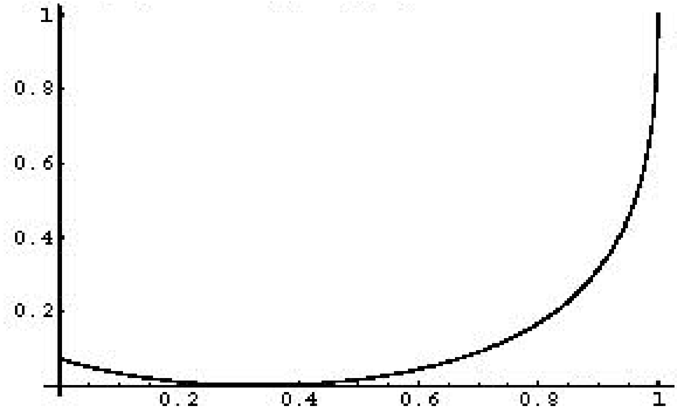

Figura 2a: *fracción óptima de apareamiento*
en función de ρ y $\beta_2(x)$=3, $\beta_2(y)$=3.

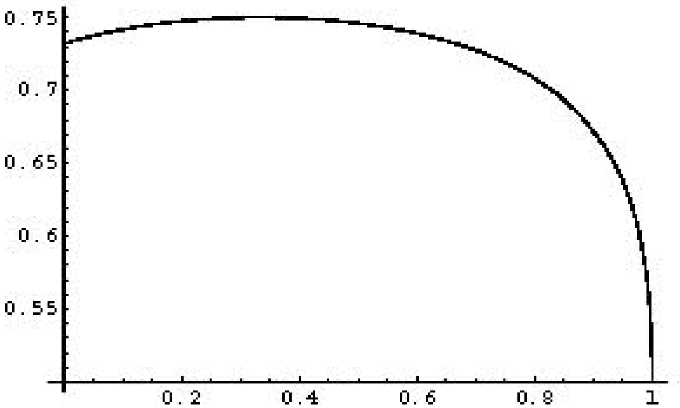

Figura 2b: *ganancia en precisión*
en función de ρ y $\beta_2(x)$=3, $\beta_2(y)$=3.

Sabemos que en el caso de estimar la media poblacional, el valor óptimo de q es

$$q'_{opt} = \frac{1}{1+\sqrt{1-\rho^2}}$$

donde ρ es el coeficiente de correlación entre y y x. Sustituyendo este valor en (3) obtenemos la expresión

$$V\left(\hat{\hat{S}}_y^2\right)=\frac{S_y^4}{n}\left[\beta_2(y)-1\right]\left(1+\sqrt{1-\rho_2}\right)\frac{K-(\theta-1)^2+K\sqrt{1-\rho_2}}{\left(2-\rho^2\right)k+2k\sqrt{1-\rho^2}\,(\theta-1)^2}$$

Suponiendo que $\rho_{x^2y^2}=\rho$, el cuadro 2 indica el tanto por ciento de la pérdida en precisión de $V\left(\hat{\hat{S}}_y^2\right)$ sobre $V\left(\hat{S}_y^2\right)$, obtenido a partir de la expresión

$$G'=\left[\frac{\left(k+\sqrt{k^2-k(\theta-1)^2}\right)\left(2-\rho^2\right)+2k\sqrt{1-\rho^2}-(\theta-1)^2}{2k\left(K-(\theta-1)^2+K\sqrt{1-\rho^2}\right)\left(1+\sqrt{1-\rho^2}\right)}-1\right]\times 100$$

Como observamos, el porcentaje de pérdida en precisión es despreciable para los valores de ρ y $\beta_2(x)$, $\beta_2(y)$. Esto sugiere que el problema de la estimación de la varianza poblacional puede ser simultáneamente considerado con la estimación de la media poblacional.

Cuadro 2: *porcentaje de pérdida en precisión, G’, para distintos valores de* ρ y $\beta_2(x)$, $\beta_2(y)$.

ρ	q'_{opt}	$\beta_2(x)$, $\beta_2(y)$					
		2,2	2,3	2,4	3,3	3,4	4,4
0,1	0,501	-1,1543	-0,0506	-0,0089	-0,0029	-0,0005	-0,0001
0,2	0,505	-0,1008	-0,0020	-0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
0,3	0,512	-0,0017	-0,0002	-0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
0,4	0,522	-0,001	0,0000	-0,0003	-0,0004	-0,0009	-0,0011
0,5	0,536	0,0000	-0,0027	-0,0047	-0,0049	-0,0054	-0,0051
0,6	0,556	-0,0103	-0,0191	-0,0109	-0,0192	-0,0169	-0,0145
0,7	0,583	-0,0642	-0,0607	-0,0448	-0,0499	-0,0390	-0,0317
0,8	0,625	-0,2016	-0,1318	-0,0658	-0,1048	-0,0738	-0,0601
0,9	0,696	-0,4713	-0,1810	-0,0072	-0,1908	-0,1118	-0,1011

Precisión en caso de normalidad

Si los momentos de la distribución (y,x) son los mismos de una normal bivariante hasta el orden cuatro, se tiene

$$\theta=\frac{\mu_{22}}{\mu_{20}\mu_{02}}=1+2\rho^2;\qquad \beta_2(x)=\frac{\mu_{04}}{\mu_{02}^2}=3$$

En este caso, la fracción óptima de apareamiento y la ganancia en precisión tienen la siguiente expresión, evaluados en el cuadro 3 y figura 3.

Cuadro 3: *porcentajes de la fracción óptima de apareamiento y la ganancia en precisión para distintos valores de ρ.*

ρ	% óptimo apareado	% de ganancia óptima	% de ganancia para p = 1/3	% de ganancia para p = ¼
0,5	49	1,6	1,4	1,2
0,6	48	3,5	3,1	2,7
0,7	46	6,9	6,3	5,5
0,8	43	7,3	12,5	11,1
0,9	37	26,1	25,9	24,2
0,95	28	39,8	39,6	39,2
1,0	0	100	66,6	75,0

Si la fracción de apareamiento toma los valores 1/3 y 1/4, la ganancia en precisión tiene estas expresiones, evaluados en el cuadro 3 y al figura 4.

$$G_{p=1/3} = \frac{\frac{8}{9}\rho^4}{4-\frac{8}{3}\rho^4}; \qquad G_{p=1/4} = \frac{\frac{3}{4}\rho^4}{4-3\rho^4};$$

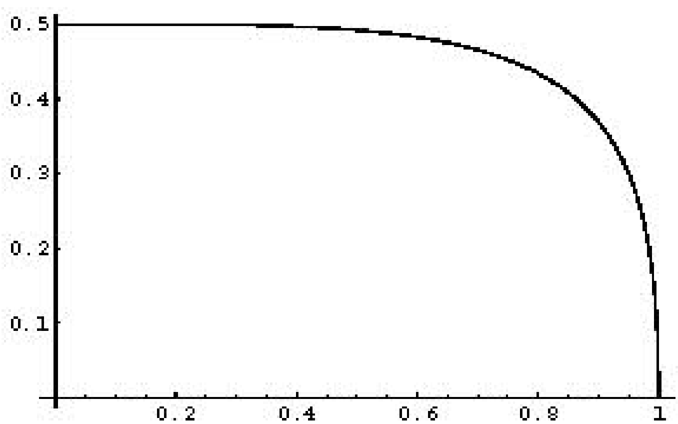

Figura 3a: *fracción óptima de apareamiento en función de ρ.*

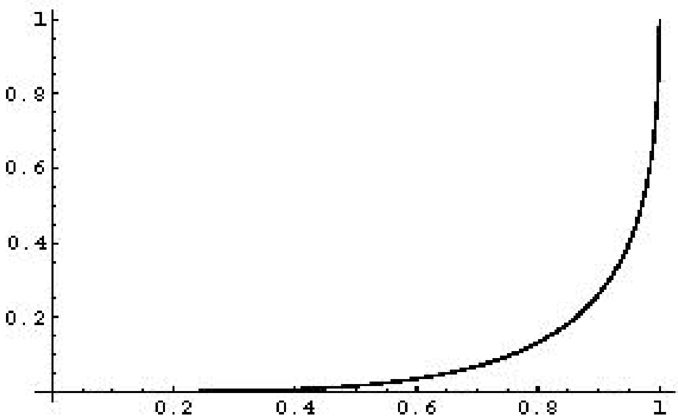

Figura 3b: *ganancia en precisión en función de ρ.*

Nótese que si hay "normalidad" ambos estimadores son igual de precisos en caso de independencia de las variables, puesto que

$$V_{\min}\left(\widehat{S}_y^2\right)-V\left(s_y^2\right)=\frac{S_y^4}{2n}\left(-1+\sqrt{1-\rho^4}\right)=0$$

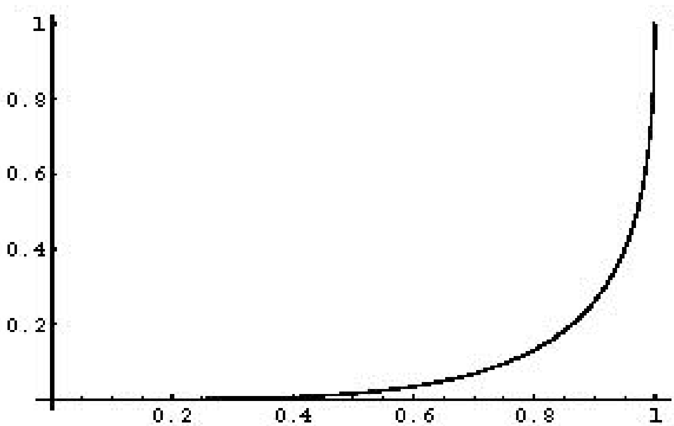

Figura 4a: *ganancia en precisión en función de ρ, para p = 1/3.*

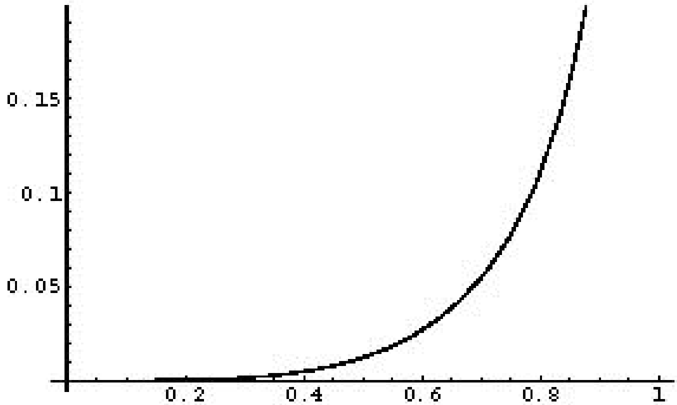

Figura 4b: *ganancia en precisión en función de ρ, para p = 1/4.*

Referencias

Artés, E.M. y García Luengo, A.V. (2001) Estimation of current population ratio in successive sampling. *Journal of the Indian Society of Agricultural Statistics,* 54 (3) 342-354.

García Luengo, A.V. (2001) *Mejora de estimadores en muestreo en ocasiones sucesivas.* Servicio de Publicaciones de la Universidad de Almería.

García Luengo, A.V. y Artés, E.M. (2002) Aportaciones al muestres sucesivo: estimador combinado de la razón poblacional tipo razón-producto. *Revista Colombiana de Estadística*, 25 (2) 145-158.

Jessen, R.J. (1942) Statistical Investigation of a Sample Survey for Obtaining Farm Facts. *Iowa Agricultural Experiment Statistical Research Bulletin,* 304.

Kendall, M. y Stuart, A. (1977) *The Advanced Theory of Statistics,* vol. 1 y 2. London: Griffin.

Patterson, H.D. (1950) Sampling on Successive Occasions with Partial Replacement of Units. *Journal of the Royal Statistical Society,* B12, 241-255.

Srivastava y Sharma (2001) On the Estimation of Population Variance in Repeat Surveys. *Journal of the Indian Society of Agricultural Statistics,* 54 (2) 355-369.